



壁面约束下椭球颗粒曳力特性研究

鲁贤民 杨渐志 顾海林 吴灵波

Study on drag characteristics of an ellipsoidal particle under wall constraint

LU Xianmin, YANG Jianzhi, GU Hailin, WU Lingbo

引用本文:

鲁贤民, 杨渐志, 顾海林, 等. 壁面约束下椭球颗粒曳力特性研究[J]. 空气动力学学报, 2024, 42(3): 19–29. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2023.0061

LU Xianmin, YANG Jianzhi, GU Hailin, et al. Study on drag characteristics of an ellipsoidal particle under wall constraint[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2024, 42(3): 19–29. DOI: 10.7638/kqdlxxb-2023.0061

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2023.0061>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

高马赫数低雷诺数条件下圆球绕流曳力系数

Drag coefficients of flows past a sphere at high Mach numbers and low Reynolds numbers

空气动力学学报. 2021, 39(3): 201–208 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0051>

微纳颗粒两相流系统中湍流脉动效应研究综述

Review of turbulent fluctuation effect on nano-particle two-phase flow system

空气动力学学报. 2021, 39(3): 109–120 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0030>

驻点流中的颗粒动力学

Particle dynamics in a stagnation point flow

空气动力学学报. 2021, 39(3): 192–200 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0015>

壁湍流等动量区对惯性颗粒分布的影响

Influence of uniform momentum zone on inertial particle distribution in wall turbulence

空气动力学学报. 2020, 38(1): 107–117 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0126>

惯性颗粒和壁湍流的相互作用：湍流调制及颗粒分布

Interactions between inertial particles and wall-bounded turbulence: Turbulence modulation and particle distribution

空气动力学学报. 2021, 39(3): 182–191 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0018>

两连发射弹出入水的轴对称超空泡流动特性

Flow characteristics of axisymmetric supercavitation induced by two successively fired projectiles in water entry and exit

空气动力学学报. 2020, 38(6): 1064–1074 <https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2019.0102>

地址: 四川省绵阳市二环路南段8号11信箱9分箱

电话: 0816-2463375

Email: kqdlxxb@163.com



关注微信公众号

获得更多资讯信息

文章编号: 0258-1825(2024)03-0019-11

壁面约束下椭球颗粒曳力特性研究

鲁贤民¹, 杨渐志^{1,*}, 顾海林², 吴灵波¹

(1. 合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009;

2. 中国计量大学 计量测试工程学院, 杭州 310018)

摘要: 颗粒两相流系统广泛存在于自然界和工程应用中, 实际颗粒往往并非球形且受其附近壁面的影响。基于欧拉-拉格朗日方法的颗粒两相流数值模拟已成为非球形颗粒两相流系统设计的重要工具, 然而其准确性受限于非球形颗粒曳力模型。因此, 深入研究壁面约束下非球形颗粒曳力特性并发展近壁修正预测模型具有重要意义。本文采用直接数值模拟方法对有限雷诺数 ($0.5 \leq Re \leq 10$) 下, 不同颗粒长轴取向与来流之间的夹角以及颗粒-壁面间距的单椭球颗粒曳力特性开展详细数值研究, 分析比较不同工况下曳力系数的变化, 探明雷诺数、攻角以及壁面间距对椭球颗粒曳力系数的影响规律, 并评估现有自由流中椭球颗粒曳力关系式的适用性, 最后发展了考虑近壁修正的椭球颗粒曳力预测模型, 为优化非球形颗粒两相流数值模拟工具提供重要支撑。

关键词: 颗粒两相流; 椭球颗粒; 曳力系数; 壁面效应; 雷诺数; 直接数值模拟

中图分类号: O354 文献标识码: A doi: 10.7638/kqdlxxb-2023.0061

Study on drag characteristics of an ellipsoidal particle under wall constraint

LU Xianmin¹, YANG Jianzhi^{1,*}, GU Hailin², WU Lingbo¹

(1. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. College of Metrology and Measurement Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Fluid-particle two-phase flows are widely encountered in nature and engineering applications, and particles in these flows are usually non-spherical and constrained by the nearby wall. Numerical simulation based on the Euler-Lagrange method has become an important approach for the design of two-phase flow systems with non-spherical particles, but its accuracy is limited by the non-spherical particle drag model. In this study, the direct numerical simulation (DNS) is performed to investigate the drag characteristics of an ellipsoidal particle at a finite Reynolds number ($0.5 \leq Re \leq 10$) for different attack angles between the particle orientation and the incoming flow, as well as different particle-wall gaps. The variation of drag coefficients under different conditions is analyzed and compared, and the influence of the Reynolds number, attack angle and wall gap on the drag coefficient of an ellipsoidal particle is explored. The applicability of existing models for predicting the drag force of an ellipsoidal particle in the freestream is evaluated, and finally a prediction model for the drag force of an ellipsoidal particle with the near-wall correction is developed, which can provide significant improvement for the numerical simulation of non-spherical particle-laden flows.

Keywords: fluid-particle two-phase flow; ellipsoidal particle; drag coefficient; wall effect; Reynolds number; direct numerical simulation

收稿日期: 2023-04-20; 修订日期: 2023-06-14; 录用日期: 2023-06-30; 网络出版时间: 2023-09-19

基金项目: 国家自然科学基金(12302331)

作者简介: 鲁贤民(1997—), 男, 安徽合肥人, 硕士研究生, 研究方向: 非球形颗粒曳力特性. E-mail: luxm20200606@163.com

通信作者: 杨渐志(1989—), 男, 安徽枞阳人, 博士、讲师, 研究方向: 钝体绕流, 颗粒两相流. E-mail: jianzhiy@hfut.edu.cn

引用格式: 鲁贤民, 杨渐志, 顾海林, 等. 壁面约束下椭球颗粒曳力特性研究[J]. 空气动力学学报, 2024, 42(3): 19–29.

LU X M, YANG J Z, GU H L, et al. Study on drag characteristics of an ellipsoidal particle under wall constraint[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2024, 42(3): 19–29(in Chinese). doi: 10.7638/kqdlxxb-2023.0061

0 引言

颗粒两相流系统广泛存在于自然界和工程应用中,例如沙质地表上风沙运动^[1]、流化床内煤粉运动^[2]等,因此理解颗粒与流体之间的相互作用对设计和优化生产设备十分重要。实际颗粒两相流系统中颗粒往往并非球形,如燃烧器中的煤粉颗粒^[3]、石油化工中的催化剂颗粒^[4]等。

目前颗粒两相流流动模拟已有大量学者开展研究并取得了显著成果^[5-7]。作为研究颗粒两相流动的重要工具,基于欧拉-拉格朗日框架的直接数值模拟方法可以分为颗粒全解析和点颗粒方法。相较于颗粒全解析直接数值模拟,点颗粒直接数值模拟通过指定颗粒曳力系数的计算关系式,简化计算过程,大幅减少计算量^[8-9]。点颗粒直接数值模拟需要准确的颗粒曳力模型,过去此类问题大多使用球形颗粒曳力模型,然而在各种工程应用中,颗粒往往存在不同的形状^[10]。Mortensen等^[11]、Marchioli等^[12]和Zhao等^[13-14]对非球形颗粒槽道湍流开展数值模拟,研究了颗粒惯性和颗粒形状对颗粒聚集、输运和旋转等行为的影响。上述非球形颗粒壁湍流模拟均假定颗粒雷诺数足够小,即蠕流。实际上颗粒在气力输送过程中,具有较大的弛豫时间,与气相存在速度差,尤其是在近壁面附近,存在速度梯度很大的边界层。此外,目前非球形颗粒曳力模型均未考虑近壁修正,壁面约束会对颗粒受力特性产生显著影响^[15]。椭球颗粒作为典型的非球形颗粒,研究其曳力特性可帮助认识非球形颗粒与流体相互作用。

颗粒曳力的研究最初是从圆球形颗粒开始,球形颗粒的曳力系数主要受雷诺数 Re 影响,前人通过大量的实验和数值模拟得到了许多适用于不同雷诺数范围的曳力关系式模型^[16-19]。但对于非球形颗粒,使用球形颗粒关系式模型会产生较大的误差^[20],因为非球形颗粒的曳力系数不仅受到颗粒的形状影响,还会受到颗粒与来流之间的夹角影响。有关椭球颗粒曳力的预测主要有两种途径:第一种是定义椭球形状和取向与球形颗粒的相关性,即Wadell^[21]、Kunii和Levenspiel^[22]提出的球形度相关概念,将不同形状的颗粒同球形颗粒曳力系数关联起来。然而,Hölzer和Sommerfeld^[23]指出颗粒的球形度无法表征来流攻角影响,且会出现两种不同形状的颗粒有相同的球形度的问题;他们进而在球形度的基础上提出了横向球形度的概念及相关关系式。该方法解决了非

球形颗粒的取向问题,但对扁平颗粒的曳力系数预测精确度较差^[24]。第二种途径是先选定颗粒形状参数,然后基于攻角为 0° 和 90° 时的颗粒曳力系数,通过拟合获得任意攻角下的曳力系数。Happel和Brenner^[25]、Rosendahl^[26]都通过确定攻角 0° 和 90° 工况下的曳力系数,基于这两个曳力系数,获得了关于任意攻角的正弦函数形式的曳力系数关系式。后续相关的研究发现^[27],该关系式不仅适用于斯托克斯区域,也适用于更高雷诺数。Zastawny等^[28]在Happel和Brenner^[25]的研究基础上,采用浸没边界法模拟研究了更高雷诺数下椭球颗粒的曳力系数,并提出了雷诺数 $1 < Re < 300$ 范围内的曳力关系式。Ouchene等^[24, 29]观察到Zastawny等^[28]的预测关系式在斯托克斯区域准确性较差,但是随着雷诺数的增加,预测的准确性会有所提高。Ouchene等^[29]还提出了 $Re < 240$ 时的新的曳力关系式。Sanjeevi等^[30]也同样观察到了Zastawny等^[28]的预测关系式的误差,并通过格子玻尔兹曼方法对更高雷诺数下的椭球颗粒曳力系数进行了计算,并在其关系式的基础上提出了雷诺数在 $0.1 \leq Re \leq 2000$ 范围内的曳力系数关系式。表1汇总了近年来不同文献中椭球颗粒曳力系数的预测关系式,由表1可知,目前尚无考虑近壁修正的椭球颗粒曳力预测关系式。

关于壁面约束对颗粒曳力影响的研究,最早是Goldman等^[32]研究了壁面对球形颗粒曳力系数的影响,发现壁面对球形颗粒曳力系数的影响十分显著,曳力系数随着颗粒-壁面间距的增大而减少,并且在贴近壁面到颗粒-壁面间距小于颗粒直径时,壁面效应的影响达到最大。Zeng等^[33-34]对近壁面有限雷诺数剪切来流中的球形颗粒曳力特性进行了研究,发现壁面的存在会增加颗粒附近的黏性效应,从而使得曳力系数增加。Ekanayake等^[35]进一步对极低雷诺数下的近壁球形颗粒曳力进行了研究,并提出新的曳力关系式。薛志亮等^[36]采用粒子图像测速法,对不同雷诺数下球形颗粒的尾流特性进行了研究,分析了壁面与颗粒之间的作用机理。Zarghami和Padding^[37]通过格子玻尔兹曼方法研究了二维椭圆在剪切来流下受到的曳力,研究发现壁面效应对椭圆颗粒的曳力系数具有显著影响,同样指出近壁面曳力的增加是附加黏性效应所致。近期,Fillingham等^[31]对低雷诺数($0.1 < Re < 10$)紧贴壁面水平放置的三维椭球颗粒曳力特性进行了数值模拟研究,并提出了贴近壁面的曳力系数预测关系式。

综上所述,一方面,为了简化计算,在传统的研

表 1 椭球颗粒曳力系数关系式
Table 1 Drag coefficients correlations for an ellipsoidal particle

文献	曳力系数关系式	适用范围
Happel 和 Brenner ^[25]	$C_{D,\alpha} = C_{D,\alpha=0^\circ} + (C_{D,\alpha=90^\circ} - C_{D,\alpha=0^\circ}) \sin^2 \alpha$	
	其中: $C_{D,\alpha=0^\circ} = K_{\alpha=0^\circ}(\lambda) C_{D,\text{sphere}}$	
	$C_{D,\alpha=90^\circ} = K_{\alpha=90^\circ}(\lambda) C_{D,\text{sphere}}$	$Re < 0.1$
	$K_{\alpha=0^\circ} = \frac{8}{3} \lambda^{-1/3} \left[\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{2\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \ln \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) \right]^{-1}$	$\lambda > 1$
Zastawny 等 ^[28]	$K_{\alpha=90^\circ} = \frac{8}{3} \lambda^{-1/3} \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{2\lambda^2 - 3}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right]^{-1}$	
	$C_{D,\alpha} = C_{D,\alpha=0^\circ} + (C_{D,\alpha=90^\circ} - C_{D,\alpha=0^\circ}) \sin^2 \alpha$	
	其中: $C_{D,\alpha=0^\circ} = \frac{a_1}{Re^{b_1}} + \frac{c_1}{Re^{d_1}}$	$1 < Re < 300$
	$C_{D,\alpha=90^\circ} = \frac{a_2}{Re^{b_2}} + \frac{c_2}{Re^{d_2}}$	$\lambda = 0.2, 1.25, 2.5$
Ouchene 等 ^[29]	$C_{D,\alpha} = C_{D,\alpha=0^\circ} + (C_{D,\alpha=90^\circ} - C_{D,\alpha=0^\circ}) \sin^2 \alpha$	
	其中: $C_{D,\alpha=0^\circ} = \frac{24}{Re} (K_{\alpha=0^\circ}(\lambda) + 0.15 \lambda^{-0.80} Re^{0.687} + (\lambda - 1)^{0.63} Re^{0.41})$	
	$C_{D,\alpha=90^\circ} = \frac{24}{Re} (K_{\alpha=90^\circ}(\lambda) + 0.15 \lambda^{-0.54} Re^{0.687} + \lambda^{1.043} (\lambda - 1)^{-0.17} Re^{0.65})$	$Re < 240$
	$K_{\alpha=0^\circ} = \frac{8}{3} \lambda^{-1/3} \left[\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{2\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \ln \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) \right]^{-1}$	$1 < \lambda < 32$
Sanjeevi 等 ^[30]	$K_{\alpha=90^\circ} = \frac{8}{3} \lambda^{-1/3} \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{2\lambda^2 - 3}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right]^{-1}$	
	$C_{D,\alpha} = C_{D,\alpha=0^\circ} + (C_{D,\alpha=90^\circ} - C_{D,\alpha=0^\circ}) \sin^2 \alpha$	
	其中: $C_{D,\alpha=0^\circ} = \left(\frac{a_1}{Re} + \frac{b_1}{Re^{c_1}} \right) e^{d_1 Re} + f_1 (1 - e^{d_1 Re})$	$0.1 < Re < 2000$
	$C_{D,\alpha=90^\circ} = \left(\frac{a_2}{Re} + \frac{b_2}{Re^{c_2}} \right) e^{d_2 Re} + f_2 (1 - e^{d_2 Re})$	$\lambda = 0.4, 2.5$
Fillingham 等 ^[31]		$0.1 < Re < 10$
	$C_{D,\alpha=0^\circ} = 1.7009 \frac{24}{Re} [\lambda^{a_1} + 0.104 \lambda^{a_2} Re^{0.75} - \alpha_3 (\lambda^2 - 1)^{a_4} Re^{a_5}]$	紧贴壁面且 $\alpha = 0^\circ$
		$1 < \lambda < 5$

究方法中, 研究者们通常将颗粒假设为球形颗粒。然而, 在很多实际颗粒两相流系统中球形颗粒的假设已不能真实反映颗粒的运动行为, 严重影响颗粒系统装备的设计、优化和实际运行^[38]。另一方面, 多数情况下, 颗粒运动往往并非处于理想的自由来流中, 而是会受到其附近壁面的影响。目前关于非球形颗粒与流体相互作用的壁面效应研究还很少。近壁流动中非球形颗粒与流体相互作用除了与颗粒雷诺数密切相关, 还强烈依赖于颗粒-壁面间距、颗粒形状和取向等多种因素, 远较球形颗粒复杂。颗粒曳力是表征流体与颗粒间相互作用的核心参数, 因此研究壁面约束下非球形颗粒曳力特性具有重要意义。目前对于壁面约束下椭球颗粒曳力特性的认识还很不足, 缺乏计及壁面效应的曳力系数预测关系式。因此, 本文采用直接数值模拟方法, 对壁面约束下单椭球颗粒绕流进行数值模拟, 分析雷诺数、来流与颗粒取向之间攻角

以及颗粒-壁面间距对椭球颗粒曳力特性的影响, 并评估现有自由流中椭球颗粒曳力预测关系式的适用性, 最后发展考虑近壁修正的椭球颗粒曳力关系式预测模型。

1 数值模拟方法

1.1 控制方程

在本文研究中, 假设计算区域内是等温不可压缩牛顿流体, 三维 Navier-Stokes 方程可以被简化为如下形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

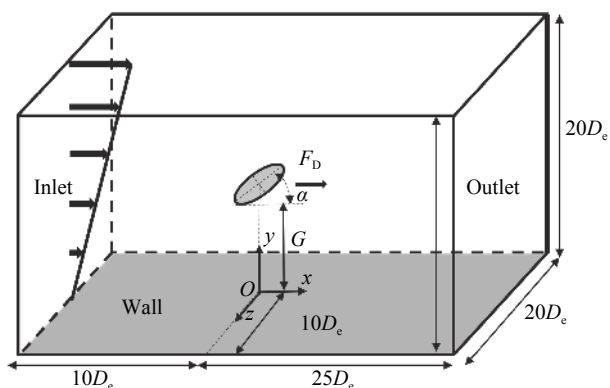
$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{2}$$

式中: $\mathbf{u}$ 为流体速度, m/s; p 为流体压力, N/m²; ρ_f 为流体密度, kg/m³; ν 是运动黏性系数, m²/s。

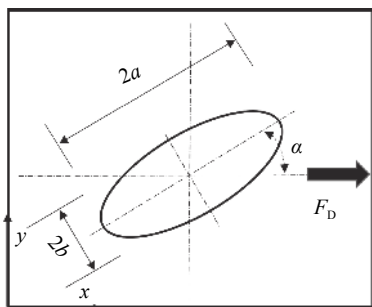
由于雷诺数较小(0.5~10),故采用直接数值模拟方法(DNS)进行计算。采用有限体积法求解控制方程,压力速度耦合采用SIMPLEC算法求解,对流项采用二阶迎风格式,扩散项使用二阶中心差分格式。

1.2 计算域及边界条件

如图1(a)所示,计算域为三维半槽道,计算域大小为 $35D_e$ (流向) $\times 20D_e$ (法向) $\times 20D_e$ (展向), D_e 为椭球的等效体积直径,椭球颗粒-壁面间距为 G (后文为了分析具有普适性,采用 D_e 对 G 进行无量纲化,即椭球颗粒-壁面无量纲间距为 G/D_e),椭球长轴与流向之间的夹角定义为攻角 α 。对于本研究中的椭球颗粒形状,选取纵横比为 $\lambda = a/b = 5/2$ 的椭球颗粒进行数值模拟,如图1(b)所示, a 和 b 分别表示椭球的长半轴和短半轴长度。



(a) 计算区域示意图



(b) 椭球颗粒 xOy 截面图

图1 壁面约束下椭球颗粒绕流计算示意图

Fig. 1 Sketch of the numerical simulation of flow past an ellipsoidal particle under wall constraint

椭球的等效体积直径定义为:

$$D_e = 2(ab^2)^{1/3} \quad (3)$$

椭球颗粒的雷诺数定义为:

$$Re = \frac{U_c D_e}{\nu} \quad (4)$$

式中 U_c 是椭球几何中心高度位置对应的来流速度, m/s。当颗粒-壁面无量纲间距 G/D_e 或攻角 α 变化时,通过调整流体运动黏性系数以保持恒定颗粒雷诺数。

计算域的边界条件如图1(a)所示,左侧边界为速度入口,来流流向速度沿 y 方向线性分布,椭球颗粒的剪切雷诺数可定义为:

$$Re_K = \frac{K D_e^2}{\nu} \quad (5)$$

其中剪切率 $K = \frac{\partial U_x}{\partial y} = 1.753 \text{ 2/s}$ 。

计算域右侧边界为压力出口。椭球颗粒表面和槽道底面为无滑移边界条件,槽道顶面速度根据剪切率给定,槽道侧面采用自由滑移边界条件。

椭球颗粒曳力系数定义为:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_c^2 \frac{\pi}{4} D_e^2} \quad (6)$$

式中: C_D 表示颗粒曳力系数; F_D 表示椭球颗粒所受曳力, N; ρ_∞ 表示来流流体密度, kg/m^3 。

1.3 数值方法验证

为了验证当前数值计算方法的可靠性,本文模拟了Fillingham等^[31]攻角 $\alpha = 0^\circ$ 时不同纵横比椭球颗粒绕流的算例,曳力系数对比如图2所示。本文计算结果与Fillingham等^[31]的数据吻合很好,最大相对误差小于5%。同时,计算得到的球形颗粒($\lambda = 1$)曳力系数与Zeng等^[34]的预测关系式结果同样吻合很好。由此,本文数值计算方法是可靠的。

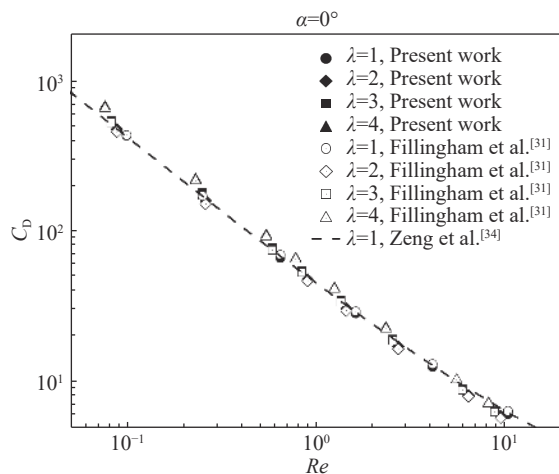


图2 攻角 $\alpha = 0^\circ$ 时紧贴壁面的椭球颗粒曳力系数

Fig. 2 Drag coefficient of an ellipsoid particle placed close to the wall at $\alpha = 0^\circ$

进一步地,选取雷诺数 $Re = 0.5$ 、间距 $G/D_e = 0.2$ 和攻角 $\alpha = 45^\circ$ 的算例进行网格独立性验证。选取3套不同疏密度的网格进行模拟,网格的最小尺寸分别为 $0.06D_e$ 、 $0.03D_e$ 和 $0.02D_e$,3套网格数量分别为 8.2×10^5 、 3.1×10^6 和 5.2×10^6 ,采用结构化网格提高网格质量且在椭球周围采用O型网格进行划分,算例的其他设置保持一致。从表2可以看出中等网格相

对精细网格的曳力系数误差小于 1%，从中等网格到精细网格的网格数量变化对于椭球颗粒曳力系数的影响可以忽略，中等网格即可满足当前计算要求，因此本研究所有算例均采用数量在 300 万左右的中等网格进行计算。

本文选取 $Re = 0.5 \sim 10$ 、 $G/D_e = 0.2 \sim 4$ 、 $\alpha = 0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内共 175 个组合算例，具体参数取值如表 3 所示。

表 2 网格无关性验证 ($Re = 2$ 、 $G/D_e = 0.2$ 、 $\alpha = 45^\circ$)

Table 2 Grid independence test at $Re = 2$, $G/D_e = 0.2$ and $\alpha = 45^\circ$

网格类型	网格数量	网格分辨率 $\Delta y/D_e$	曳力系数 C_D	相对精细网格结果的误差
粗糙网格	8.2×10^5	0.06	19.20	2.2%
中等网格	3.1×10^6	0.03	19.49	0.8%
精细网格	5.2×10^6	0.02	19.65	—

表 3 研究参数选取

Table 3 Investigated parameters selection

参数	取值点
Re/m^{-1}	0.5, 1, 2, 4, 8
G/D_e	0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 2, 4
$\alpha/(^\circ)$	0, 30, 45, 60, 90

2 结果与分析

2.1 不同因素对椭球颗粒曳力系数的影响

通过计算不同工况下椭球颗粒的曳力系数，得到椭球颗粒的曳力系数随颗粒雷诺数 Re 、颗粒-壁面无

量纲间距 G/D_e 和攻角 α 变化的关系。图 3 是不同工况下曳力系数变化关系图，从图中可以看出，椭球颗粒曳力系数随雷诺数 Re 和颗粒-壁面无量纲间距 G/D_e 的增大而减小，而随攻角 α 的增大而增大。

在不同雷诺数下，椭球颗粒曳力系数随攻角 α 和颗粒-壁面无量纲间距 G/D_e 的变化趋势类似。在本文研究的任意雷诺数和攻角下，椭球颗粒曳力系数在 $G/D_e = 0.2$ 时达到最大值；随着 G/D_e 的增加，曳力系数变化可分为三个阶段（图中用三个颜色区分），即快速下降阶段（ $0.2 \leq G/D_e \leq 1$ ）、下降阶段（ $1 \leq G/D_e \leq 2$ ）和缓慢下降阶段（ $2 \leq G/D_e \leq 4$ ）。为更清晰地反映颗粒-壁面间距对椭球颗粒曳力系数的影响规律，用 $G/D_e = 4$ 时的曳力系数进行无量纲化，结果如图 4 所示。在同一攻角和雷诺数下，曳力系数在 $G/D_e = 0.2$ 时可达 $G/D_e = 4$ 的 1.2~1.35 倍。同样的，可清楚地观察到曳力系数随颗粒-壁面间距的变化呈现如前所述的三个阶段。

为进一步探明壁面约束对曳力系数的影响，将曳力系数 C_D 分解为压差曳力系数 $C_{D,p}$ 和摩擦曳力系数 $C_{D,v}$ [24, 39]：

$$C_{D,p} = |F_p| / (0.5 \rho_\infty U_c^2 \frac{\pi}{4} D_e^2) \quad (7)$$

$$C_{D,v} = |F_v| / (0.5 \rho_\infty U_c^2 \frac{\pi}{4} D_e^2) \quad (8)$$

$$C_D = (|F_p + F_v|) / (0.5 \rho_\infty U_c^2 \frac{\pi}{4} D_e^2) \quad (9)$$

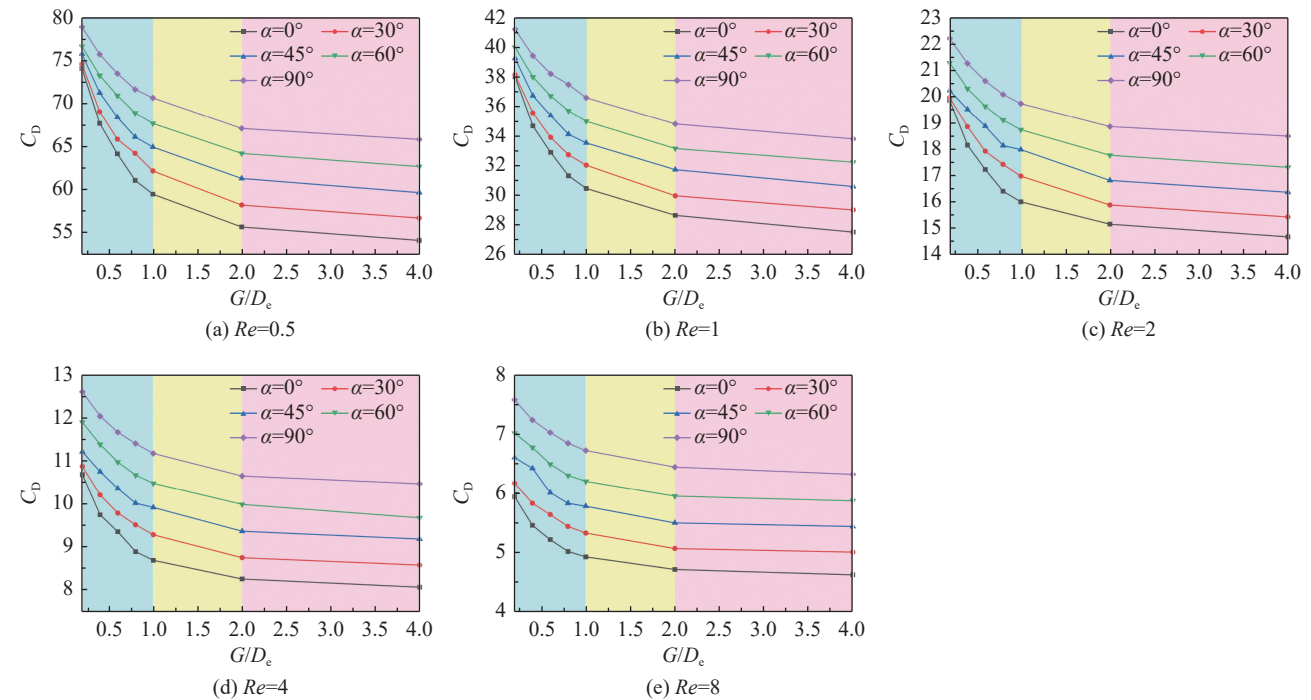


图 3 不同 Re 、 G/D_e 、 α 下的椭球颗粒曳力系数

Fig. 3 Drag coefficients of an ellipsoidal particle at different Re , G/D_e and α

$$\mathbf{F}_p = \oint_s (p - p_\infty) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_v = \oint_s \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11)$$

式中: $\mathbf{F}_p$ 为椭球颗粒所受压差曳力, N; $\mathbf{F}_v$ 为椭球颗粒所受摩擦曳力, N; $\mathbf{I}$ 为单位向量; $\mathbf{n}$ 为单位法向量; $\boldsymbol{\tau}$ 为黏性应力张量, N/m²。

摩擦曳力系数与压差曳力系数的比值随颗粒-壁面无量纲间距变化的关系如图 5 所示。从图中可以看出, 在不同的 Re 和 G/D_e 下, 摩擦曳力系数与压差曳力系数的比值在 2~7 之间, 即摩擦曳力始终占主要贡献。在不同的雷诺数和攻角下, 摩擦曳力系数与压差曳力系数的比值在 $G/D_e < 1$ 时随 G/D_e 增大而略微增加, 但当 $G/D_e > 1$ 时, 该比值变化较小且趋于平

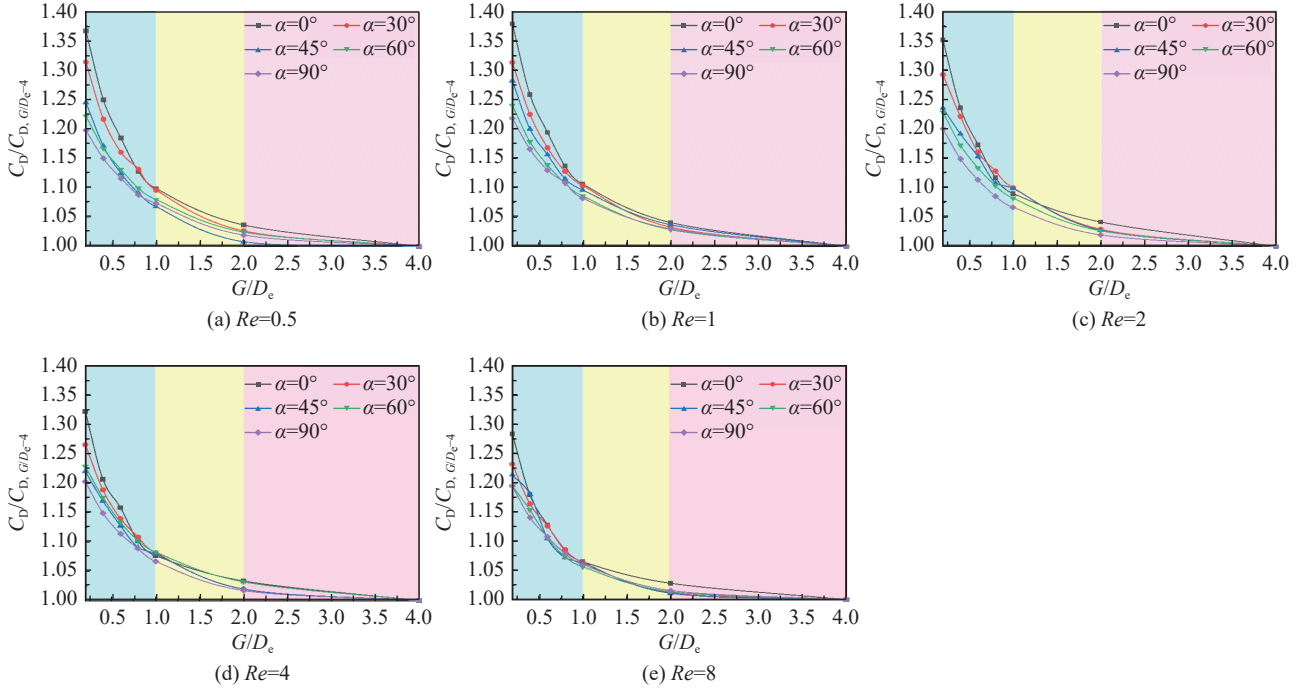


图 4 不同 G/D_e 下曳力系数与 $G/D_e = 4$ 时曳力系数的比值

Fig. 4 Ratios of the drag coefficients at different G/D_e to the drag coefficient at $G/D_e = 4$

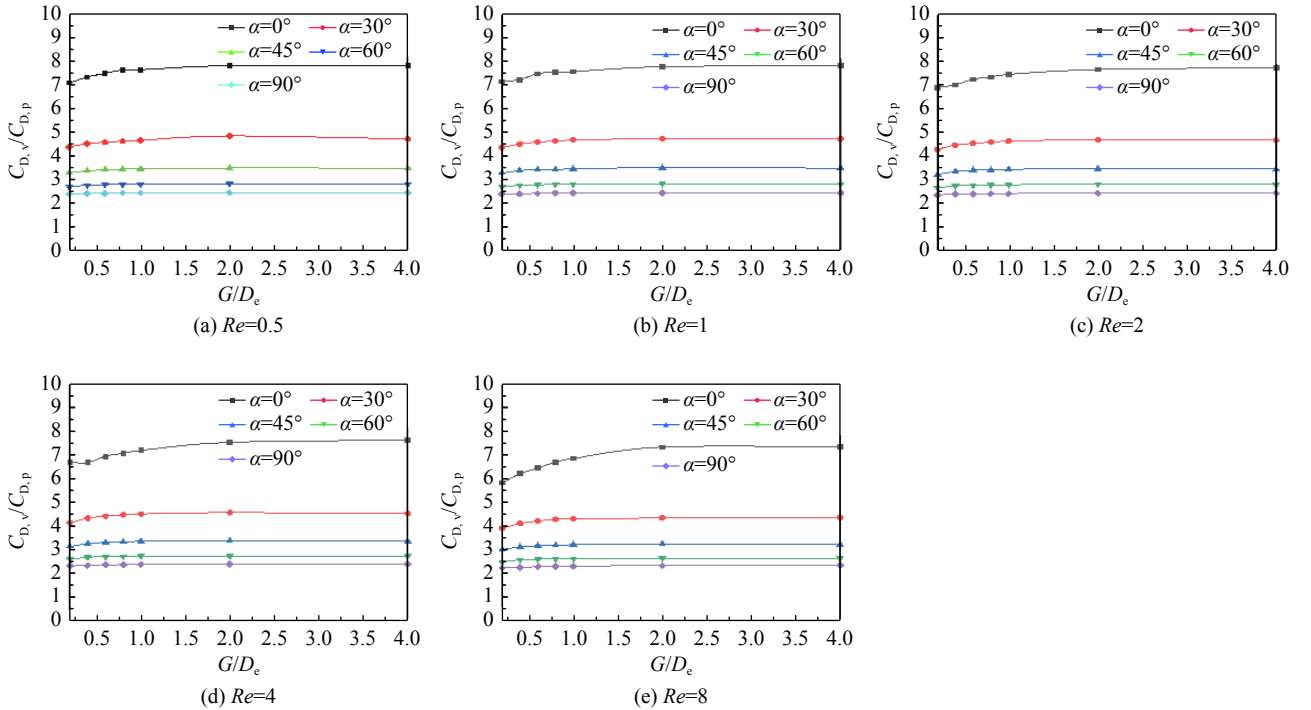


图 5 不同工况下摩擦曳力系数与压差曳力系数之比

Fig. 5 Ratios of viscous drag coefficient to pressure drag coefficient under different conditions

缓。在同一雷诺数和颗粒-壁面无量纲间距时,摩擦曳力系数与压差曳力系数的比值随攻角增加而明显下降,特别在小攻角($\alpha = 0^\circ \sim 45^\circ$)时,随攻角增加该比值由7下降到3左右,在大攻角($\alpha = 45^\circ \sim 90^\circ$)时,该比值下降趋势减缓,仅仅从3下降至2左右。

图6是在 $G/D_e = 0.6$ 、不同雷诺数时,压差、摩擦和总曳力系数随攻角 α 的变化。从图6中可以看出,在不同雷诺数下,椭球颗粒压差和总曳力系数随攻角 α 的增加而显著增加,摩擦曳力系数随攻角 α 的增加而略微减小。虽然图5表明摩擦曳力系数在颗粒的曳力系数中占据主导地位,但是椭球颗粒曳力系数

的增长是来自压差曳力系数的增长。

为更直观地了解颗粒-壁面无量纲间距 G/D_e 和攻角 α 对椭球颗粒受力的影响,给出了不同工况下的压力系数云图,如图7和图8所示。压力系数计算公式如下:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_c^2} \quad (12)$$

图7是 $Re = 2$ 、 $\alpha = 0^\circ$ 时,不同颗粒-壁面无量纲间距 G/D_e 下的压力系数云图。从图7可以看到,在 $G/D_e < 1$ 时,壁面会影响椭球颗粒周围的压力分布,

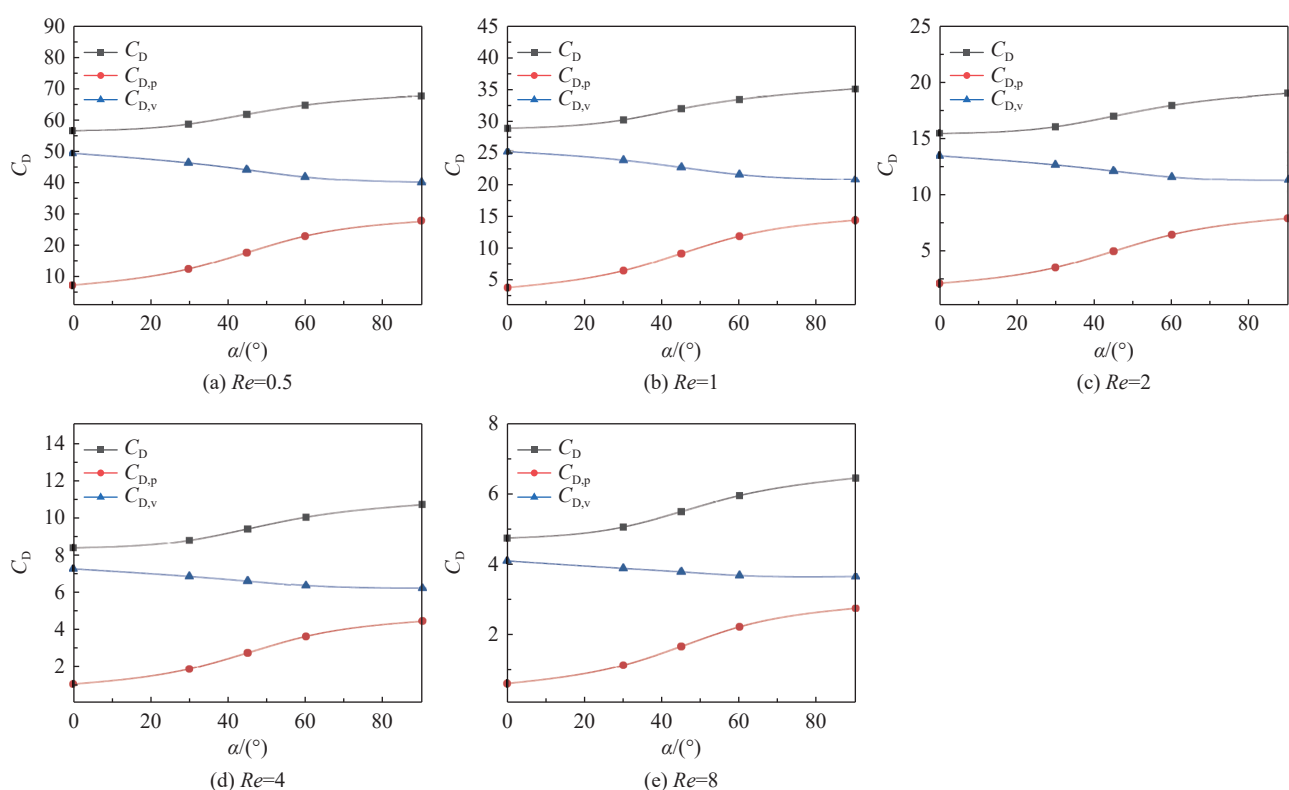
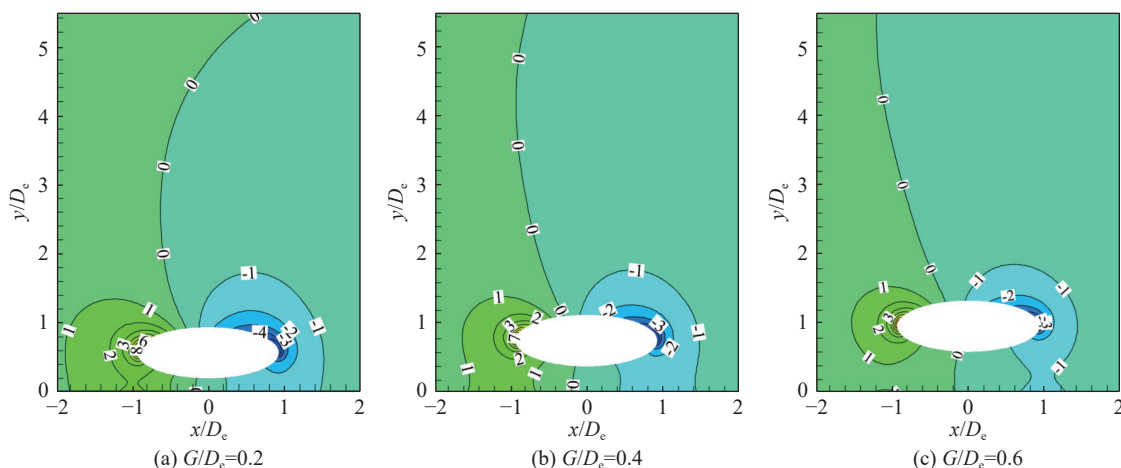


图6 $G/D_e = 0.6$ 时,压差、摩擦和总曳力系数随 Re 、 α 的变化

Fig. 6 Variations of the pressure drag coefficient, viscous drag coefficient and total drag coefficient with Re 、 α at $G/D_e = 0.6$



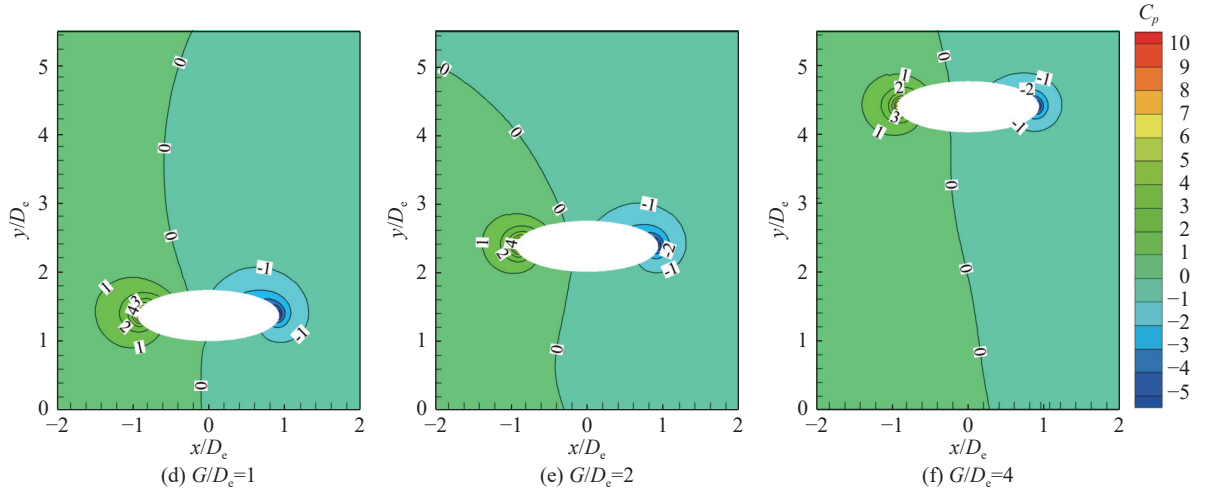


图 7 $Re=2$ 、 $\alpha=0^\circ$ 时, 不同 G/D_e 下的压力系数云图

Fig. 7 Contours of pressure coefficient for different G/D_e at $Re=2$ and $\alpha=0^\circ$

使其不再对称。同时在较小的颗粒-壁面无量纲间距 ($G/D_e=0.2, 0.4, 0.6$) 时, 壁面的存在会增大椭球颗粒附近的低压(蓝色)区域, 随着 G/D_e 的增大, 壁面影响逐渐削弱, 低压区域逐渐变小且趋于对称。综合图 5 和图 7 来看, 在小颗粒-壁面无量纲间距下, 壁面的存在增大了压差曳力在总曳力中的占比; 随着颗粒-壁面无量纲间距的增大, 当 $G/D_e>1$ 时, 壁面效应对压差曳力的影响减弱, 压差曳力在总曳力中的占比

减少且不再变化。

图 8 是 $Re=2$ 、 $G/D_e=0.6$ 时, 不同攻角 α 下的压力系数云图。从图 8 中可以看到, 当攻角由 0° 增大到 30° 时, 椭球颗粒附近低/高压区域均明显增加, 椭球颗粒的压差系数增大, 从而导致摩擦曳力系数与压差曳力系数的比值大幅下降; 而攻角从 60° 到 90° 时, 椭球颗粒附近低/高压区域均增幅减小, 这导致摩擦曳力与压差曳力的比值下降趋势减缓。

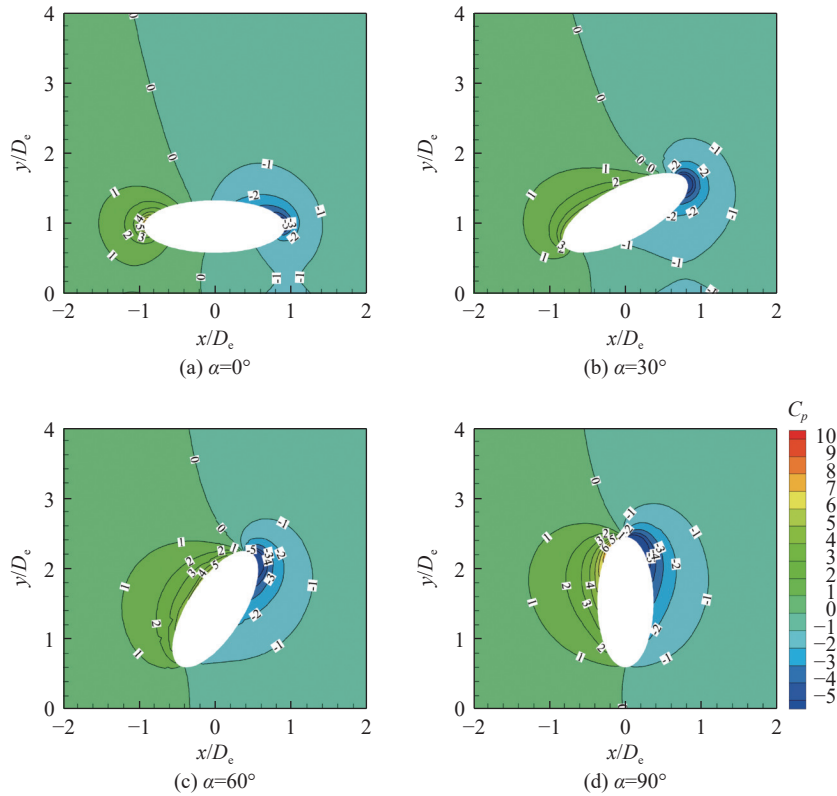


图 8 $Re=2$ 、 $G/D_e=0.6$ 时, 不同攻角下的压力系数云图

Fig. 8 Contours of pressure coefficient for different α at $Re=2$ and $G/D_e=0.6$

2.2 现有模型评估

由以上研究可知,壁面的存在会显著影响椭球颗粒所受曳力特性。正如前文所述,基于欧拉-拉格朗日框架的点颗粒直接数值模拟的准确性直接依赖于颗粒点力模型,因此本文首先对现有自由来流中的椭球颗粒曳力系数关系式的适用性进行评估。将文献[25, 28, 30, 31]中的椭球颗粒曳力关系式预测结果同本文的直接数值模拟结果进行比较,如图9所示。从图中可以看出, Fillingham等[31]的预测关系式虽然考虑到了壁面约束的影响,但只考虑到紧贴壁面情形,无法描述颗粒-壁面无量纲间距 G/D_e 变化所带来的影响,预测结果总体偏大。而 Happel 和 Brenner[25]、Zastawny等[28]、Sanjeevi等[30]的曳力关系式考虑了椭球颗粒形状的影响,但是缺乏对壁面效应的考虑,所以关系式预测的曳力系数偏小。由此可见,现有自由流中椭球颗粒的曳力模型预测存在较大偏差,亟需发展计及壁面效应的椭球颗粒曳力系数预测模型。

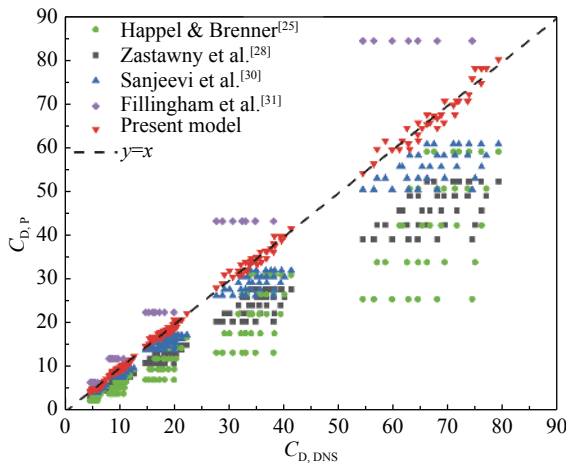


图9 不同椭球颗粒曳力模型预测结果与本文直接数值模拟结果对比

Fig. 9 Comparison between the predicted results of different ellipsoidal particle drag models and the DNS data in this paper

2.3 考虑近壁修正的椭球曳力系数预测模型

对于椭球颗粒,在斯托克斯流下, Happel 和 Brenner[25]提出了适用于不同攻角下椭球颗粒曳力系数的预测关系式:

$$C_{D,\alpha} = C_{D,\alpha=0^\circ} + (C_{D,\alpha=90^\circ} - C_{D,\alpha=0^\circ})\sin^2\alpha \quad (13)$$

研究表明,该式提出的曳力系数随颗粒攻角的正弦平方变化关系可拓展到更高雷诺数[27],因此本研究针对椭球颗粒曳力系数的关系式同样在此基础上进行修正。

最近, Sanjeevi等[30]在 Happel 和 Brenner[25]的研

究基础上,提出了雷诺数在 0.1~2000 范围内适用的曳力关系式。Sanjeevi等[30]在 $\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 时提出的不同关系式如下:

$$C_{D,\alpha=0^\circ} = \left(\frac{23.10}{Re} + \frac{3.397}{Re^{0.364}} \right) e^{-0.0008Re} + 0.169(1 - e^{-0.0008Re}) \quad (14)$$

$$C_{D,\alpha=90^\circ} = \left(\frac{27.93}{Re} + \frac{4.286}{Re^{0.234}} \right) e^{-0.0018Re} + 0.815(1 - e^{-0.0018Re}) \quad (15)$$

将壁面约束存在时椭球颗粒曳力系数和自由来流中的曳力结果相比,定义曳力近壁修正系数 C^* 为:

$$C^* = C_{D,DNS} / C_{D, Sanjeevi} \quad (16)$$

图10给出了 $Re = 2$ 时不同攻角和颗粒-壁面无量纲间距的曳力修正系数。由图10可以看出,近壁修正系数随 G/D_e 的增加逐渐趋于自由来流的结果,值得一提的是,当 $G/D_e = 4$ 时壁面效应的影响仍不可忽略。不同雷诺数下的曳力修正系数与 $Re = 2$ 时的变化趋势类似。在 $Re = 0.5 \sim 10$ 的范围内,本文对 $\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 时分别提出了不同的曳力修正系数关系式:

$$C_{D,\alpha=0^\circ} = \left[\frac{0.1617}{Re^{0.1458}(G/D_e)^{0.6358}} + 1 \right] C_{D, Sanjeevi, \alpha=0^\circ} \quad (17)$$

$$C_{D,\alpha=90^\circ} = \left[\frac{0.1374}{Re^{0.0898}(G/D_e)^{0.4812}} + 1 \right] C_{D, Sanjeevi, \alpha=90^\circ} \quad (18)$$

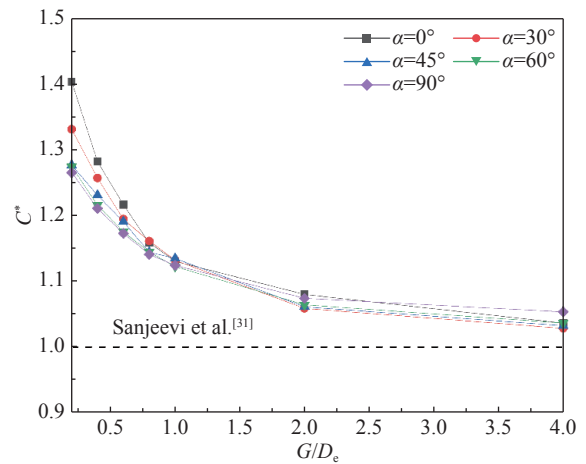


图10 $Re = 2$ 时不同 α 和 G/D_e 下的曳力修正系数分布

Fig. 10 Drag force correction factor distribution for different α and G/D_e at $Re = 2$

对于任意的攻角 α , 有:

$$C_{D,\alpha} = C_{D,\alpha=0^\circ} + (C_{D,\alpha=90^\circ} - C_{D,\alpha=0^\circ})\sin^2\alpha \cdot \left[1 - \frac{0.5217}{Re^{0.0455}(G/D_e)^{0.0073}} \right] \quad (19)$$

由公式(17~19)可知,当 G/D_e 趋于无穷大时,壁

面的影响可以忽略不计,此时关系式可以收敛到自由来流结果。

本文采用平均绝对百分比误差(mean absolute percentage Error, MAPE)对关系式预测效果进行评估:

$$S_{\text{MAPE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\widehat{C}_{\text{Di}} - C_{\text{Di}}}{C_{\text{Di}}} \right| \quad (20)$$

式中, $\widehat{C}_{\text{Di}}$ 为模型预测曳力系数, C_{Di} 为实际曳力系数, n 为所有算例数目。

通过对比关系式预测结果和数值计算结果(见图9),发现最大相对误差为12.5%,平均绝对百分比误差约4%,决定系数 $R^2 = 0.9968$,这表明我们的关系式预测性能良好。

3 结 论

本文采用直接数值模拟方法对雷诺数 $Re = 0.5 \sim 10$ 、攻角 $\alpha = 0^\circ \sim 90^\circ$ 和颗粒-壁面无量纲间距 $G/D_e = 0.2 \sim 4$ 的椭球颗粒曳力特性进行了研究。

首先,讨论了不同因素对椭球颗粒曳力系数的影响。椭球颗粒曳力系数随雷诺数和壁面间距的增长而减小,随攻角 α 的增大而增大。

其次,基于曳力贡献分解,分析了不同因素的影响机理。当前雷诺数下椭球颗粒摩擦曳力始终占主要贡献。由于壁面约束可显著改变压差曳力大小,曳力系数变化可分为三个阶段:快速下降阶段($0.2 \leq G/D_e \leq 1$)、下降阶段($1 \leq G/D_e \leq 2$)和缓慢下降阶段($2 \leq G/D_e \leq 4$)。进一步地,分析攻角对颗粒曳力系数的影响机制,发现攻角 α 的增大导致椭球颗粒附近的低压区域增大,从而引起颗粒压差曳力系数的增加,并成为椭球颗粒曳力系数随攻角增大的主要原因。

最后,通过对比文献中曳力系数关系式和数值模拟的结果,发现现有自由流中椭球颗粒的曳力模型预测存在较大偏差。进一步地,基于壁面效应对曳力系数的影响规律,提出了考虑近壁修正的椭球颗粒曳力系数的预测关系式,该关系式的最大相对误差为12.5%,平均绝对百分比误差约4%,决定系数 $R^2 = 0.9968$,预测性能较好。

需要指出的是,本研究将椭球长轴固定在 xOy 面内,然而实际情况下,椭球颗粒的长轴可能位于不同平面,椭球颗粒曳力特性可能会更加复杂。另外,本研究只考虑了一个纵横比的椭球颗粒,颗粒纵横比的影响考虑得还不够全面。这些都是今后需要进一步开展的工作。

参 考 文 献:

- [1] 王萍,郑晓静. 风沙两相流数值模拟研究进展[J]. *航空学报*, 2021, 42(9): 625767.
WANG P, ZHENG X J. Advances in numerical simulation of wind-blown sand[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2021, 42(9): 625767 (in Chinese).
doi: 10.7527/S1000-6893.2021.25767
- [2] 包福兵,林建忠,吴法理,等. 粉煤灰管道气力输送特性的研究[J]. *流体机械*, 2005, 33(7): 15-19,59.
BAO F B, LIN J Z, WU F L, et al. Research on the pneumatic conveying characteristics of fly ash in the power station[J]. *Fluid Machinery*, 2005, 33(7): 15-19,59 (in Chinese).
doi: 10.3969/j.issn.1005-0329.2005.07.005
- [3] BRIX J, JENSEN P A, JENSEN A D. Modeling char conversion under suspension fired conditions in O_2/N_2 and O_2/CO_2 atmospheres[J]. *Fuel*, 2011, 90(6): 2224-2239.
doi: 10.1016/j.fuel.2011.01.021
- [4] 张立忠,王成,侯红英,等. 载体形状对催化剂物化性能的影响[J]. *当代化工*, 2014, 43(12): 2506-2508.
ZHANG L Z, WANG C, HOU H Y, et al. Impact of the shape on physical and chemical properties of catalyst[J]. *Contemporary Chemical Industry*, 2014, 43(12): 2506-2508 (in Chinese).
doi: 10.13840/j.cnki.cn21-1457/tq.2014.12.008
- [5] 李中华,李志辉,彭傲平,等. 一种稀薄两相流动的数值模拟方法[J]. *空气动力学学报*, 2015, 33(2): 266-271.
LI Z H, LI Z H, PENG A P, et al. A numerical method for simulating rarefied two phase flow[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2015, 33(2): 266-271 (in Chinese).
doi: 10.7638/kqdlxxb-2013.0028
- [6] YU Z S, WANG P, LIN J Z, et al. Equilibrium positions of the elastoinertial particle migration in rectangular channel flow of Oldroyd-B viscoelastic fluids[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 868: 316-340.
doi: 10.1017/jfm.2019.188
- [7] ZHU C L, YU Z S, SHAO X M. Interface-resolved direct numerical simulations of the interactions between neutrally buoyant spheroidal particles and turbulent channel flows[J]. *Physics of Fluids*, 2018, 30(11).
doi: 10.1063/1.5051592
- [8] BALACHANDAR S, EATON J K. Turbulent dispersed multiphase flow[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2010, 42: 111-133.
doi: 10.1146/annurev.fluid.010908.165243
- [9] 崔智文,王泽,蒋新宇,等. 非球形颗粒两相流的数值模拟研究进展[J]. *力学进展*, 2022, 52(3): 623-672.
CUI Z W, WANG Z, JIANG X Y, et al. Numerical study of non-spherical particle-laden flows[J]. *Advances in Mechanics*, 2022, 52(3): 623-672 (in Chinese).
doi: 10.6052/1000-0992-22-006
- [10] MCILVEEN-WRIGHT D R, HUANG Y, REZVANI S, et al. A technical and environmental analysis of co-combustion of coal and biomass in fluidised bed technologies[J]. *Fuel*, 2007, 86(14): 2032-2042.
doi: 10.1016/j.fuel.2007.02.011
- [11] MORTENSEN P H, ANDERSSON H I, GILLISSEN J J J, et al. Dynamics of prolate ellipsoidal particles in a turbulent channel flow[J]. *Physics of Fluids*, 2008, 20(9): 093302.
doi: 10.1063/1.2975209
- [12] MARCHIOLI C, FANTONI M, SOLDATI A. Orientation, distribution, and deposition of elongated, inertial fibers in turbulent channel flow[J]. *Physics of Fluids*, 2010, 22(3).
doi: 10.1063/1.3328874
- [13] 崔智文,赵立豪. 近壁湍流中微小非球形颗粒取向行为研究综述[J]. *空气动力学学报*, 2021, 39(3): 99-108.
CUI Z W, ZHAO L H. Reviews on alignment of non-spherical particles

- in wall-bounded turbulence[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2021, 39(3): 99–108 (in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2021.0045](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0045)
- [14] ZHAO L H, MARCHIOLI C, ANDERSSON H I. Slip velocity of rigid fibers in turbulent channel flow[J]. *Physics of Fluids*, 2014, 26(6).
doi: [10.1063/1.4881942](https://doi.org/10.1063/1.4881942)
- [15] 蔡杰, 彭正标, 吴珏, 等. 壁面约束对气固两相流中细长颗粒流化特性影响的数值研究[J]. *中国电机工程学报*, 2008, 28(23): 71–74.
CAI J, PENG Z B, WU H, et al. Simulation study on the effects of wall on the fluidizing features of slender particles in gas-solid[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2008, 28(23): 71–74 (in Chinese).
doi: [10.13334/j.0258-8013.pcsee.2008.23.006](https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.2008.23.006)
- [16] CLIFT R, Grace J R, Weber M E. Bubbles, drops, and particles[M]. New York: Academic Press, 1978.
- [17] CLIFT R, GAUVIN W H. Motion of entrained particles in gas streams[J]. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 1971, 49(4): 439–448.
doi: [10.1002/cjce.5450490403](https://doi.org/10.1002/cjce.5450490403)
- [18] BROWN P P, LAWLER D F. Sphere drag and settling velocity revisited[J]. *Journal of Environmental Engineering*, 2003, 129(3): 222–231.
doi: [10.1061/\(asce\)0733-9372\(2003\)129:3\(222\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9372(2003)129:3(222))
- [19] 李瑞元, 陈飞国, 葛蔚, 等. 高马赫数低雷诺数条件下圆球绕流曳力系数[J]. *空气动力学学报*, 2021, 39(3): 201–208.
LI R Y, CHEN F G, GE W, et al. Drag coefficients of flows past a sphere at high Mach numbers and low Reynolds numbers[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2021, 39(3): 201–208 (in Chinese).
doi: [10.7638/kqdlxxb-2021.0051](https://doi.org/10.7638/kqdlxxb-2021.0051)
- [20] 陆勇, 宋振华, 钟文琪, 等. 高速摄影法测量圆盘状颗粒曳力系数的方法研究[J]. *工程热物理学报*, 2015, 36(2): 351–355.
LU Y, SONG Z H, ZHONG W Q, et al. Study of high speed photography method for measuring drag coefficients of non-spherical disc type particles[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2015, 36(2): 351–355 (in Chinese).
- [21] WADELL H. The coefficient of resistance as a function of Reynolds number for solids of various shapes[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 1934, 217(4): 459–490.
doi: [10.1016/S0016-0032\(34\)90508-1](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(34)90508-1)
- [22] KUNII D, LEVENSPIEL O. Fluidization engineering [M]. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1991.
- [23] HÖLZER A, SOMMERFELD M. New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles[J]. *Powder Technology*, 2008, 184(3): 361–365.
doi: [10.1016/j.powtec.2007.08.021](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2007.08.021)
- [24] OUCHENE R, KHALIJ M, TANIÈRE A, et al. Drag, lift and torque coefficients for ellipsoidal particles: from low to moderate particle Reynolds numbers[J]. *Computers & Fluids*, 2015, 113: 53–64.
doi: [10.1016/j.compfluid.2014.12.005](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.12.005)
- [25] HAPPEL J, BRENNER H. Low Reynolds number hydrodynamics [M]. 1st ed. Hague: Kluwer Academic Publishers, 1983.
- [26] ROSENDAHL L. Using a multi-parameter particle shape description to predict the motion of non-spherical particle shapes in swirling flow[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2000, 24(1): 11–25.
doi: [10.1016/S0307-904X\(99\)00023-2](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(99)00023-2)
- [27] SANJEEVI S K P, PADDING J T. On the orientational dependence of drag experienced by spheroids[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 820: R1.
doi: [10.1017/jfm.2017.239](https://doi.org/10.1017/jfm.2017.239)
- [28] ZASTAWNY M, MALLOUPPAS G, ZHAO F, et al. Derivation of drag and lift force and torque coefficients for non-spherical particles in flows[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2012, 39: 227–239.
doi: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.09.004](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.09.004)
- [29] OUCHENE R, KHALIJ M, ARCEN B, et al. A new set of correlations of drag, lift and torque coefficients for non-spherical particles and large Reynolds numbers[J]. *Powder Technology*, 2016, 303: 33–43.
doi: [10.1016/j.powtec.2016.07.067](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.07.067)
- [30] SANJEEVI S K P, KUIPERS J A M, PADDING J T. Drag, lift and torque correlations for non-spherical particles from Stokes limit to high Reynolds numbers[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 2018, 106: 325–337.
doi: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.05.011](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.05.011)
- [31] FILLINGHAM P, VADDI R S, BRUNING A, et al. Drag, lift and torque on a prolate spheroid resting on a smooth surface in a linear shear flow[J]. *Powder Technology*, 2021, 377: 958–965.
doi: [10.1016/j.powtec.2020.09.042](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.09.042)
- [32] GOLDMAN A J, COX R G, BRENNER H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall — II Couette flow[J]. *Chemical Engineering Science*, 1967, 22(4): 653–660.
doi: [10.1016/0009-2509\(67\)80048-4](https://doi.org/10.1016/0009-2509(67)80048-4)
- [33] ZENG L Y, BALACHANDAR S, FISCHER P. Wall-induced forces on a rigid sphere at finite Reynolds number[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, 536: 1–25.
doi: [10.1017/s0022112005004738](https://doi.org/10.1017/s0022112005004738)
- [34] ZENG L Y, NAJJAR F, BALACHANDAR S, et al. Forces on a finite-sized particle located close to a wall in a linear shear flow[J]. *Physics of Fluids*, 2009, 21(3): 033302.
doi: [10.1063/1.3082232](https://doi.org/10.1063/1.3082232)
- [35] EKANAYAKE N I K, BERRY J D, STICKLAND A D, et al. Lift and drag forces acting on a particle moving with zero slip in a linear shear flow near a wall[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 904.
doi: [10.1017/jfm.2020.662](https://doi.org/10.1017/jfm.2020.662)
- [36] 薛志亮, 王肖, 吴学成, 等. 水平槽道近壁面附近颗粒尾流特性的高分辨率PIV实验研究[J]. *中国电机工程学报*, 2017, 37(3): 810–818.
XUE Z L, WANG X, WU X C, et al. Experimental investigation on the characteristics of spherical particle wake in a horizontal channel flow by high resolution PIV[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2017, 37(3): 810–818 (in Chinese).
doi: [10.13334/j.0258-8013.pcsee.152562](https://doi.org/10.13334/j.0258-8013.pcsee.152562)
- [37] ZARGHAMI A, PADDING J T. Drag, lift and torque acting on a two-dimensional non-spherical particle near a wall[J]. *Advanced Powder Technology*, 2018, 29(6): 1507–1517.
doi: [10.1016/j.apr.2018.03.019](https://doi.org/10.1016/j.apr.2018.03.019)
- [38] 闫盛楠, 唐天琪, 任安星, 等. 基于人工神经网络模型的非球形颗粒曳力系数预测[J]. *工程热物理学报*, 2017, 38(10): 2171–2175.
YAN S N, TANG T Q, REN A X, et al. Prediction of drag coefficient of non-spherical particles based on artificial neural network model[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2017, 38(10): 2171–2175 (in Chinese).
- [39] GANGULI S, LELE S K. Drag of a heated sphere at low Reynolds numbers in the absence of buoyancy[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 869: 264–291.
doi: [10.1017/jfm.2019.187](https://doi.org/10.1017/jfm.2019.187)

(本文责编: 周奇杰)